令和６年度専攻科入学試験問題

数　学

受験番号		氏名	

諸　注　意

1．問題用紙は全部で７枚です。８枚目に計算用紙が付いています。
2．問題は問Ⅰから問Ⅸまであります。全てに答えてください。
3．解答欄には途中の計算と説明も書いてください。
4．試験時間は９０分です。
5．試験開始６０分後から退出できます。試験問題用紙を裏返しにし、試験監督者の許可を得て静かに退出してください。
6．開始の合図があるまで本問題用紙を開かないでください。

問　Ⅰ	問　Ⅱ	問　Ⅲ	問　Ⅳ	問　Ⅴ
問　Ⅵ	問　Ⅶ	問　Ⅷ	問　Ⅸ	

（採点表です。受験生は記入しないでください）

合　計

令和6年専攻科入学試験　数学　(No.1)

受験番号		氏名	

問 I　次の値を求めよ.

(1) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4}$

[解]

(2) $2\log_3 4 + \log_3 5 - \dfrac{1}{\log_8 3}$

[解]

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{20}(3k-1)(3k+1)$

[解]

問 II　次の問に答えよ.

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき次の方程式を解け.

$2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

[解]

(2) 不等式 $\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - x - 6) + 1 > 0$ を解け.

[解]

受験番号		氏名	

問 III　次の問に答えよ.

(1) $\vec{a}=(6,4)$, $\vec{b}=(-2,1)$, $\vec{c}=(-1,4)$ のとき, $(\vec{a}+t\vec{b})/\!/\,\vec{c}$ となるように t の値を定めよ.
[解]

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき, $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$ の値を求めよ.
[解]

問 IV　次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
[解]

(2) $\begin{pmatrix} 1001 & 1002 & 1003 \\ 1002 & 1003 & 1001 \\ 1001 & 1001 & 999 \end{pmatrix}$
[解]

受験番号		氏名	

問 V　次の行列について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(1) A の固有値を求めよ．

[解]

(2) 対角化行列 P を求めて A を対角化せよ．

[解]

問 VI　次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2 - 2}$

[解]

(2) $y = x\cos(x^2 - 1)$

[解]

受験番号		氏名	

問 VII

$\log \dfrac{1+x}{1-x}$ をマクローリン展開し, $\log \dfrac{1+x}{1-x} = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + o(x^7)$ の形に書き表せ.

[解]

受験番号		氏名	

問 VIII　条件 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x+2y$ の極値について以下の問に答えよ.

(1) $F(x,y,\lambda)=x+2y-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおいたとき, 連立方程式 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ の異なる 2 つの解 $(x,y,\lambda)=(a_1,b_1,\alpha_1),\ (a_2,b_2,\alpha_2)$ を求めよ.

[解]

(2) (1) で求めた解 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ について, 陰関数定理により, それぞれの点の近くで $g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ が存在することがわかる. このとき $\dfrac{d\varphi_1}{dx}(a_1)$, $\dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2}(a_1)$, $\dfrac{d\varphi_2}{dx}(a_2)$, $\dfrac{d^2\varphi_2}{dx^2}(a_2)$ の値をそれぞれ求めよ.

[解]

受験番号		氏名	

問 VIII (つづき)

(3) $p_1(x) = f(x, \varphi_1(x)), p_2(x) = f(x, \varphi_2(x))$ とおいたとき, $\dfrac{dp_1}{dx}(a_1)$, $\dfrac{d^2p_1}{dx^2}(a_1)$, $\dfrac{dp_2}{dx}(a_2)$, $\dfrac{d^2p_2}{dx^2}(a_2)$ の値をそれぞれ求めよ.

[解]

(4) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 上の点 (a, b) で $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たす点は存在しないため, ラグランジュの未定乗数法より極値の候補は 2 点 (a_1, b_1), (a_2, b_2) のみである. 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとでの関数 $f(x, y) = x + 2y$ の極値をすべて答えよ.

[解]

受験番号		氏名	

問 **IX**　次の問に答えよ．

(1)

重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めよ．ただし $D:\ x^2+y^2 \leqq 4,\ x+y \geqq 2$ とする．

[解]

(2)

$f(y) = y\displaystyle\int_0^{y^2} \sin(1-x)^2 dx$ とするとき，積分順序を変更することで

$\displaystyle\int_0^1 f(y)dy$ を求めよ．

[解]

(計算用紙)